

# Indice

<b>1</b>	<b>Operazioni elementari, convoluzione, correlazione</b>	<b>1</b>
1.1	Operazioni elementari . . . . .	1
1.1.1	Ribaltamento, traslazione, scalatura . . . . .	1
1.2	Convoluzione . . . . .	5
1.2.1	Convoluzione tra segnali somma di segnali elementari (delta, rettangoli, gradini) . . . . .	5
1.2.2	Convoluzione (segnale rettangolare ed esponenziale) . . . . .	8
1.2.3	Convoluzione tra segnali composti (triangolo ed esponenziale) . . . . .	9
1.2.4	Convoluzione normalizzata (gradino e segno) . . . . .	12
1.2.5	Convoluzione circolare tra due segnali di stesso periodo fondamentale . . . . .	13
1.3	Correlazione . . . . .	16
1.3.1	Cross-correlazione tra segnali di energia (rettangolo, triangolo) . . . . .	16
1.3.2	Cross-correlazione e convoluzione (rettangolo e segnale sinusoidale) . . . . .	18
1.3.3	Auto-correlazione di un segnale di energia (trapezio) . . . . .	19
1.4	Esercizi proposti . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Rappresentazione vettoriale dei segnali</b>	<b>27</b>
2.1	Prodotto scalare, ortogonalità e distanza tra segnali . . . . .	27
2.1.1	Prodotto scalare e distanza tra segnali di energia . . . . .	27
2.1.2	Prodotto scalare e distanza tra segnali di potenza . . . . .	30
2.1.3	Ortogonalità tra segnali . . . . .	33
2.2	Approssimazione di un segnale in uno spazio vettoriale . . . . .	34
2.2.1	Ortogonalizzazione di una base ed approssimazione di un segnale (segnali rettangolari) . . . . .	34
2.2.2	Ortogonalizzazione di una base ed approssimazione di un segnale (segnali sinusoidali finestrati) . . . . .	36
2.2.3	Approssimazione di un segnale esponenziale in una base ortogonale . . . . .	39
2.2.4	Rappresentazione in basi biortogonali (n-uple di numeri) . . . . .	40

2.2.5	Approssimazione di un segnale in una base biortogonale (segnali rettangolari) . . . . .	42
2.3	Esercizi proposti . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Analisi di Fourier</b>	<b>49</b>
3.1	Trasformata di Fourier: principali proprietà . . . . .	49
3.1.1	Trasformata di Fourier di un segnale ad energia finita (esponenziale) . . . . .	49
3.1.2	Trasformata di Fourier di un segnale composto . . . . .	51
3.1.3	Trasformata di Fourier di segnali gaussiani . . . . .	51
3.1.4	Convoluzione tra sinusoidi e segnali ad energia finita . . . . .	53
3.1.5	Convoluzione tra segnali (sinusoide, sinc) . . . . .	55
3.1.6	Densità spettrale di energia (segnale esponenziale) . . . . .	56
3.2	Trasformata di Fourier di segnali periodici . . . . .	57
3.2.1	Sviluppo in Serie di Fourier di segnali sinusoidali e cross- correlazione . . . . .	57
3.2.2	Sviluppo in Serie di Fourier (impulsi gaussiani) . . . . .	59
3.2.3	Sviluppo in Serie di Fourier (impulsi triangolari) . . . . .	61
3.3	Relazioni di Parseval . . . . .	63
3.3.1	Ortogonalità tra segnali (analisi nel dominio delle frequenze) . . . . .	63
3.3.2	Distanza tra segnali parametrici . . . . .	65
3.3.3	Rappresentazione vettoriale ed approssimazione di segnali (segnali di tipo sinc(.)) . . . . .	65
3.4	Esercizi proposti . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Sistemi a tempo continuo</b>	<b>77</b>
4.1	Classificazione dei sistemi . . . . .	77
4.1.1	Scalatura dell'asse dei tempi . . . . .	77
4.1.2	Sommatore . . . . .	79
4.1.3	Media mobile . . . . .	79
4.1.4	Classificazione di un sistema lineare tempo invariante . . . . .	81
4.2	Sistemi lineari tempo invarianti (LTI) . . . . .	82
4.2.1	Risposta al gradino di un sistema LTI . . . . .	82
4.2.2	Filtraggio di sinusoidi . . . . .	84
4.2.3	Filtraggio di un segnale periodico (derivatore) . . . . .	85
4.2.4	Filtraggio di un segnale somma di segnali elementari . . . . .	86
4.3	Esercizi proposti . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Variabili Casuali</b>	<b>95</b>
5.1	Richiami sul calcolo delle probabilità . . . . .	95
5.1.1	Esempi di calcolo delle probabilità . . . . .	95
5.2	Variabili casuali discrete . . . . .	102
5.2.1	Dado equilibrato . . . . .	102
5.2.2	Estrazioni e monete . . . . .	104
5.2.3	Palline e Urne . . . . .	106
5.2.4	Estrazioni del lotto . . . . .	108

5.3	Variabili casuali continue . . . . .	109
5.3.1	Caratterizzazione di variabili casuali continue . . . . .	109
5.3.2	Funzione di una variabile casuale uniforme (trapezio) . . . . .	111
5.3.3	Densità condizionata di una variabile continua . . . . .	112
5.3.4	Funzione di variabile casuale continua condizionata (triangolo) . . . . .	112
5.4	Vettori di variabili casuali . . . . .	116
5.4.1	Densità congiunta di due variabili casuali discrete (monete truccate e palline) . . . . .	116
5.4.2	Valori attesi condizionati di variabili casuali discrete (monete, palline, urne) . . . . .	118
5.4.3	Valori attesi condizionati di somme di variabili casuali . . . . .	125
5.4.4	Indipendenza ed incorrelazione di due variabili casuali continue . . . . .	127
5.4.5	Valori attesi condizionati di due variabili casuali uniformi . . . . .	128
5.4.6	Densità di probabilità di una funzione di due variabili casuali . . . . .	131
5.4.7	Densità di probabilità congiunta di due funzioni di due variabili casuali uniformi . . . . .	133
5.4.8	Densità di probabilità di una funzione di due variabili casuali non indipendenti . . . . .	137
5.4.9	Densità di probabilità di una funzione di due variabili casuali definite su domini rettangolari . . . . .	139
5.4.10	Funzione caratteristica congiunta di due variabili casuali . . . . .	145
5.5	Esercizi proposti . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Caratterizzazione di processi stocastici</b> . . . . .	<b>157</b>
6.1	Caratterizzazione di processi stocastici . . . . .	157
6.1.1	Segnale sinusoidale con fase casuale . . . . .	157
6.1.2	Segnale periodico con fase casuale oppure ampiezza casuale . . . . .	160
6.1.3	Caratterizzazione di un processo gaussiano bianco . . . . .	165
6.1.4	Processo PAM rettangolare e segnale casuale costante . . . . .	167
6.1.5	Somma di processi gaussiani indipendenti . . . . .	170
6.2	Esercizi proposti . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Processi stocastici nei sistemi</b> . . . . .	<b>179</b>
7.1	Processi stocastici nei sistemi . . . . .	179
7.1.1	Filtraggio di un rumore gaussiano bianco passa-banda . . . . .	179
7.1.2	Filtraggio di un rumore gaussiano (somma di rumori gaussiani) . . . . .	180
7.1.3	Filtraggio di un segnale periodico con fase casuale e rumore gaussiano . . . . .	182
7.1.4	Processo PAM e rumore gaussiano . . . . .	184
7.1.5	Prodotto di processi stocastici indipendenti (gaussiano e sinusoidale) . . . . .	185
7.2	Esercizi proposti . . . . .	186

<b>8</b>	<b>Campionamento e quantizzazione</b>	<b>195</b>
8.1	Campionamento e quantizzazione (sistemi non LTI)	195
8.1.1	Interpolazione non ideale di un segnale campionato	195
8.1.2	Interpolazione di una sinusoide sotto-campionata	197
8.1.3	Filtraggio di un segnale campionato ed interpolato	198
8.1.4	Interpolazione di un segnale campionato distorto	200
8.1.5	Interpolazione lineare di un segnale somma di due segnali campionati	203
8.1.6	Processo bianco campionato e quantizzato	205
8.1.7	Segnale rumoroso quantizzato (quantizzatore uniforme con tanti livelli)	206
8.1.8	Quantizzatore a 2 livelli	207
8.2	Campionamento e quantizzazione di un processo stocastico	214
8.2.1	Segnale rumoroso campionato e quantizzato (**)	214
8.2.2	Interpolazione (non ideale) di un processo campionato e quantizzato (***)	218
8.3	Esercizi proposti	223
<b>9</b>	<b>Appendice (Complementi di teoria dei segnali)</b>	<b>229</b>
9.1	Segnali elementari	229
9.1.1	Segnali elementari di uso comune	229
9.2	Spazi vettoriali dei segnali	233
9.2.1	Spazio dei Segnali	233
9.2.2	Distanza tra segnali	233
9.2.3	Spazio Vettoriale	236
9.2.3.1	Base di uno spazio vettoriale	237
9.2.4	Norma	237
9.2.5	Prodotto Scalare	238
9.2.6	Relazioni tra distanza, norma, prodotto scalare	240
9.2.7	Rappresentazione di un segnale rispetto ad una base	241
9.2.7.1	Basi biortogonali	242
9.2.7.2	Basi ortonormali	243
9.2.7.3	Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt	243
9.2.7.4	Relazioni di Parseval	244
9.2.8	Approssimazione di un segnale rispetto ad una base	245
9.2.8.1	Teorema di decomposizione	245
9.2.8.2	Approssimazione di segnali ai minimi errori quadrati	245
9.2.9	Cross-correlazione tra segnali	247
9.2.9.1	Convoluzione normalizzata e convoluzione circolare	248
9.3	Trasformata di Fourier	250
9.3.1	Definizione della trasformata di Fourier	250
9.3.1.1	Interpretazione della trasformata come prodotto scalare	251
9.3.2	Principali proprietà della trasformata di Fourier	252

9.3.3	Trasformata di Fourier di segnali elementari . . . . .	255
9.3.4	Proprietà dell'impulso di Dirac . . . . .	256
9.3.5	Trasformata di Fourier di un segnale periodico e legami con la serie di Fourier . . . . .	257
9.3.6	Densità spettrali di energia e di potenza . . . . .	258
9.4	Sistemi a tempo continuo . . . . .	260
9.4.1	Classificazione di un sistema . . . . .	260
9.4.1.1	Definizione di Sistema . . . . .	260
9.4.1.2	Linearità . . . . .	260
9.4.1.3	Tempo-invarianza . . . . .	260
9.4.1.4	Memoria . . . . .	261
9.4.1.5	Causalità . . . . .	261
9.4.1.6	Stabilità . . . . .	261
9.4.2	Sistemi lineari e lineari tempo invarianti . . . . .	261
9.4.2.1	Sistemi lineari . . . . .	261
9.4.2.2	Sistemi lineari tempo invarianti . . . . .	262
9.4.3	Analisi in frequenza dei sistemi LTI . . . . .	263
9.4.3.1	Sistemi a Fase Lineare . . . . .	265
9.4.3.2	Filtri ideali . . . . .	265
9.4.3.3	Classificazione di sistemi LTI . . . . .	266
9.4.3.4	Memoria . . . . .	266
9.4.3.5	Causalità . . . . .	266
9.4.3.6	Stabilità . . . . .	266
9.4.3.7	Caratterizzazione di un sistema LTI in termini di correlazione . . . . .	267
9.5	Variabili casuali . . . . .	269
9.5.1	Misura di probabilità . . . . .	269
9.5.2	Elementi di calcolo combinatorio . . . . .	271
9.5.3	Variabili casuali . . . . .	273
9.5.3.1	Esempi di variabili casuali . . . . .	277
9.5.4	Prove ripetute indipendenti . . . . .	278
9.5.5	Vettori di variabili casuali . . . . .	280
9.5.6	Variabili casuali congiuntamente gaussiane . . . . .	283
9.5.7	Variabili casuali condizionate . . . . .	285
9.5.8	Valori attesi condizionati . . . . .	288
9.5.9	Teoremi limite . . . . .	290
9.6	Processi stocastici . . . . .	291
9.6.1	Definizione di processo stocastico . . . . .	291
9.6.2	Medie d'insieme . . . . .	292
9.6.3	Legami tra due o più processi stocastici . . . . .	294
9.6.4	Medie temporali . . . . .	294
9.6.5	Ergodicità . . . . .	295
9.6.6	Densità spettrale di potenza . . . . .	296
9.6.7	Processi ciclo-stazionari . . . . .	297
9.6.8	Esempi di processi stocastici fondamentali . . . . .	298
9.6.8.1	Processi puramente casuali . . . . .	298

9.6.8.2	Processi di Markov . . . . .	298
9.6.8.3	Processi gaussiani . . . . .	299
9.6.8.4	Rumore bianco . . . . .	300
9.6.8.5	Segnale periodico a fase casuale . . . . .	301
9.6.8.6	Processi PAM . . . . .	305
9.6.8.7	Processo di Poisson . . . . .	307
9.6.8.8	Passaggiate a caso e processo di Wiener-Levy . . . . .	310
9.6.9	Filtraggio di un processo stocastico . . . . .	312
9.6.9.1	Trasformazione mediante un sistema non LTI . . . . .	314
9.6.10	Somma e prodotto di processi stocastici . . . . .	314
9.6.10.1	Moltiplicazione tra due processi incorrelati . . . . .	314
9.6.10.2	Somma di due processi . . . . .	314
9.7	Campionamento . . . . .	315
9.7.1	Introduzione . . . . .	315
9.7.2	Campionamento ideale . . . . .	316
9.7.3	Interpolazione ideale del segnale campionato . . . . .	319
9.7.4	Teorema del campionamento . . . . .	323
9.7.5	Filtraggio anti-aliasing . . . . .	323
9.7.6	Altri filtri di interpolazione . . . . .	324
9.7.6.1	Mantenitore (Sample and Hold) . . . . .	324
9.7.6.2	Interpolazione lineare . . . . .	326
9.7.7	Campionamento ed interpolazione di un processo stocastico . . . . .	329
9.8	Quantizzazione . . . . .	331
9.8.1	Quantizzazione di un segnale . . . . .	331
9.8.2	Quantizzatore uniforme con tanti livelli . . . . .	335
9.8.3	Analisi spettrale del rumore di quantizzazione . . . . .	337
9.8.4	Quantizzatore ottimo . . . . .	339