

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Operazioni elementari, convoluzione, correlazione</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Operazioni elementari . . . . .  | 1         |
| 1.1.1    | Ribaltamento, traslazione, scalatura . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Convoluzione . . . . .   | 5         |
| 1.2.1    | Convoluzione tra segnali somma di segnali elementari (delta, rettangoli, gradini) . . . . .                | 5         |
| 1.2.2    | Convoluzione (segnale rettangolare ed esponenziale) . . . . .  | 8         |
| 1.2.3    | Convoluzione tra segnali composti (triangolo ed esponenziale) . . . . .                                    | 9         |
| 1.2.4    | Convoluzione normalizzata (gradino e segno) . . . . .  | 12        |
| 1.2.5    | Convoluzione circolare tra due segnali di stesso periodo fondamentale . . . . .                            | 13        |
| 1.3      | Correlazione . . . . .   | 16        |
| 1.3.1    | Cross-correlazione tra segnali di energia (rettangolo, triangolo) . . . . .                                | 16        |
| 1.3.2    | Cross-correlazione e convoluzione (rettangolo e segnale sinusoidale) . . . . .                             | 18        |
| 1.3.3    | Auto-correlazione di un segnale di energia (trapezio) . . . . .  | 19        |
| 1.4      | Esercizi proposti . . . . .  | 20        |
| <b>2</b> | <b>Rappresentazione vettoriale dei segnali</b>   | <b>27</b> |
| 2.1      | Prodotto scalare, ortogonalità e distanza tra segnali . . . . .  | 27        |
| 2.1.1    | Prodotto scalare e distanza tra segnali di energia . . . . .   | 27        |
| 2.1.2    | Prodotto scalare e distanza tra segnali di potenza . . . . .   | 30        |
| 2.1.3    | Ortogonalità tra segnali . . . . .   | 33        |
| 2.2      | Approssimazione di un segnale in uno spazio vettoriale . . . . .   | 34        |
| 2.2.1    | Ortogonalizzazione di una base ed approssimazione di un segnale (segnali rettangolari) . . . . .           | 34        |
| 2.2.2    | Ortogonalizzazione di una base ed approssimazione di un segnale (segnali sinusoidali finestrati) . . . . . | 36        |
| 2.2.3    | Approssimazione di un segnale esponenziale in una base ortogonale . . . . .                                | 39        |
| 2.2.4    | Rappresentazione in basi biortogonali (n-uple di numeri) . . . . .   | 40        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.2.5    | Approssimazione di un segnale in una base biortogonale<br>(segnali rettangolari) . . . . .       | 42        |
| 2.3      | Esercizi proposti . . . . .  | 46        |
| <b>3</b> | <b>Analisi di Fourier</b>  | <b>49</b> |
| 3.1      | Trasformata di Fourier: principali proprietà . . . . .   | 49        |
| 3.1.1    | Trasformata di Fourier di un segnale ad energia finita<br>(esponenziale) . . . . .               | 49        |
| 3.1.2    | Trasformata di Fourier di un segnale composto . . . . .  | 51        |
| 3.1.3    | Trasformata di Fourier di segnali gaussiani . . . . .  | 51        |
| 3.1.4    | Convoluzione tra sinusoidi e segnali ad energia finita . . . . .                                 | 53        |
| 3.1.5    | Convoluzione tra segnali (sinusoide, sinc) . . . . .   | 55        |
| 3.1.6    | Densità spettrale di energia (segnale esponenziale) . . . . .                                    | 56        |
| 3.2      | Trasformata di Fourier di segnali periodici . . . . .  | 57        |
| 3.2.1    | Sviluppo in Serie di Fourier di segnali sinusoidali e cross-<br>correlazione . . . . .           | 57        |
| 3.2.2    | Sviluppo in Serie di Fourier (impulsi gaussiani) . . . . .                                       | 59        |
| 3.2.3    | Sviluppo in Serie di Fourier (impulsi triangolari) . . . . .                                     | 61        |
| 3.3      | Relazioni di Parseval . . . . .  | 63        |
| 3.3.1    | Ortogonalità tra segnali (analisi nel dominio delle frequenze) . . . . .                         | 63        |
| 3.3.2    | Distanza tra segnali parametrici . . . . .   | 65        |
| 3.3.3    | Rappresentazione vettoriale ed approssimazione di segnali<br>(segnali di tipo sinc(.)) . . . . . | 65        |
| 3.4      | Esercizi proposti . . . . .  | 68        |
| <b>4</b> | <b>Sistemi a tempo continuo</b>  | <b>77</b> |
| 4.1      | Classificazione dei sistemi . . . . .  | 77        |
| 4.1.1    | Scalatura dell'asse dei tempi . . . . .  | 77        |
| 4.1.2    | Sommatore . . . . .  | 79        |
| 4.1.3    | Media mobile . . . . .   | 79        |
| 4.1.4    | Classificazione di un sistema lineare tempo invariante . . . . .                                 | 81        |
| 4.2      | Sistemi lineari tempo invarianti (LTI) . . . . .   | 82        |
| 4.2.1    | Risposta al gradino di un sistema LTI . . . . .  | 82        |
| 4.2.2    | Filtraggio di sinusoidi . . . . .  | 84        |
| 4.2.3    | Filtraggio di un segnale periodico (derivatore) . . . . .  | 85        |
| 4.2.4    | Filtraggio di un segnale somma di segnali elementari . . . . .                                   | 86        |
| 4.3      | Esercizi proposti . . . . .  | 87        |
| <b>5</b> | <b>Variabili Casuali</b>   | <b>95</b> |
| 5.1      | Richiami sul calcolo delle probabilità . . . . .   | 95        |
| 5.1.1    | Esempi di calcolo delle probabilità . . . . .  | 95        |
| 5.2      | Variabili casuali discrete . . . . .   | 102       |
| 5.2.1    | Dado equilibrato . . . . .   | 102       |
| 5.2.2    | Estrazioni e monete . . . . .  | 104       |
| 5.2.3    | Palline e Urne . . . . .   | 106       |
| 5.2.4    | Estrazioni del lotto . . . . .   | 108       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.3      | Variabili casuali continue . . . . .  | 109        |
| 5.3.1    | Caratterizzazione di variabili casuali continue . . . . .   | 109        |
| 5.3.2    | Funzione di una variabile casuale uniforme (trapezio) . . . . .   | 111        |
| 5.3.3    | Densità condizionata di una variabile continua . . . . .  | 112        |
| 5.3.4    | Funzione di variabile casuale continua condizionata (triangolo) . . . . .                                 | 112        |
| 5.4      | Vettori di variabili casuali . . . . .  | 116        |
| 5.4.1    | Densità congiunta di due variabili casuali discrete (monete truccate e palline) . . . . .                 | 116        |
| 5.4.2    | Valori attesi condizionati di variabili casuali discrete (monete, palline, urne) . . . . .                | 118        |
| 5.4.3    | Valori attesi condizionati di somme di variabili casuali . . . . .  | 125        |
| 5.4.4    | Indipendenza ed incorrelazione di due variabili casuali continue . . . . .                                | 127        |
| 5.4.5    | Valori attesi condizionati di due variabili casuali uniformi . . . . .                                    | 128        |
| 5.4.6    | Densità di probabilità di una funzione di due variabili casuali . . . . .                                 | 131        |
| 5.4.7    | Densità di probabilità congiunta di due funzioni di due variabili casuali uniformi . . . . .              | 133        |
| 5.4.8    | Densità di probabilità di una funzione di due variabili casuali non indipendenti . . . . .                | 137        |
| 5.4.9    | Densità di probabilità di una funzione di due variabili casuali definite su domini rettangolari . . . . . | 139        |
| 5.4.10   | Funzione caratteristica congiunta di due variabili casuali . . . . .                                      | 145        |
| 5.5      | Esercizi proposti . . . . .   | 147        |
| <b>6</b> | <b>Caratterizzazione di processi stocastici</b> . . . . .   | <b>157</b> |
| 6.1      | Caratterizzazione di processi stocastici . . . . .  | 157        |
| 6.1.1    | Segnale sinusoidale con fase casuale . . . . .  | 157        |
| 6.1.2    | Segnale periodico con fase casuale oppure ampiezza casuale . . . . .                                      | 160        |
| 6.1.3    | Caratterizzazione di un processo gaussiano bianco . . . . .   | 165        |
| 6.1.4    | Processo PAM rettangolare e segnale casuale costante . . . . .  | 167        |
| 6.1.5    | Somma di processi gaussiani indipendenti . . . . .  | 170        |
| 6.2      | Esercizi proposti . . . . .   | 172        |
| <b>7</b> | <b>Processi stocastici nei sistemi</b> . . . . .  | <b>179</b> |
| 7.1      | Processi stocastici nei sistemi . . . . .   | 179        |
| 7.1.1    | Filtraggio di un rumore gaussiano bianco passa-banda . . . . .  | 179        |
| 7.1.2    | Filtraggio di un rumore gaussiano (somma di rumori gaussiani) . . . . .                                   | 180        |
| 7.1.3    | Filtraggio di un segnale periodico con fase casuale e rumore gaussiano . . . . .                          | 182        |
| 7.1.4    | Processo PAM e rumore gaussiano . . . . .   | 184        |
| 7.1.5    | Prodotto di processi stocastici indipendenti (gaussiano e sinusoidale) . . . . .                          | 185        |
| 7.2      | Esercizi proposti . . . . .   | 186        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>8</b> | <b>Campionamento e quantizzazione</b>                                     | <b>195</b> |
| 8.1      | Campionamento e quantizzazione (sistemi non LTI)                          | 195        |
| 8.1.1    | Interpolazione non ideale di un segnale campionato                        | 195        |
| 8.1.2    | Interpolazione di una sinusoide sotto-campionata                          | 197        |
| 8.1.3    | Filtraggio di un segnale campionato ed interpolato                        | 198        |
| 8.1.4    | Interpolazione di un segnale campionato distorto                          | 200        |
| 8.1.5    | Interpolazione lineare di un segnale somma di due segnali campionati      | 203        |
| 8.1.6    | Processo bianco campionato e quantizzato                                  | 205        |
| 8.1.7    | Segnale rumoroso quantizzato (quantizzatore uniforme con tanti livelli)   | 206        |
| 8.1.8    | Quantizzatore a 2 livelli   | 207        |
| 8.2      | Campionamento e quantizzazione di un processo stocastico                  | 214        |
| 8.2.1    | Segnale rumoroso campionato e quantizzato (**)                            | 214        |
| 8.2.2    | Interpolazione (non ideale) di un processo campionato e quantizzato (***) | 218        |
| 8.3      | Esercizi proposti   | 223        |
| <b>9</b> | <b>Appendice (Complementi di teoria dei segnali)</b>                      | <b>229</b> |
| 9.1      | Segnali elementari  | 229        |
| 9.1.1    | Segnali elementari di uso comune  | 229        |
| 9.2      | Spazi vettoriali dei segnali  | 233        |
| 9.2.1    | Spazio dei Segnali  | 233        |
| 9.2.2    | Distanza tra segnali  | 233        |
| 9.2.3    | Spazio Vettoriale   | 236        |
| 9.2.3.1  | Base di uno spazio vettoriale   | 237        |
| 9.2.4    | Norma   | 237        |
| 9.2.5    | Prodotto Scalare  | 238        |
| 9.2.6    | Relazioni tra distanza, norma, prodotto scalare                           | 240        |
| 9.2.7    | Rappresentazione di un segnale rispetto ad una base                       | 241        |
| 9.2.7.1  | Basi biortogonali   | 242        |
| 9.2.7.2  | Basi ortonormali  | 243        |
| 9.2.7.3  | Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt                              | 243        |
| 9.2.7.4  | Relazioni di Parseval   | 244        |
| 9.2.8    | Approssimazione di un segnale rispetto ad una base                        | 245        |
| 9.2.8.1  | Teorema di decomposizione   | 245        |
| 9.2.8.2  | Approssimazione di segnali ai minimi errori quadrati                      | 245        |
| 9.2.9    | Cross-correlazione tra segnali  | 247        |
| 9.2.9.1  | Convoluzione normalizzata e convoluzione circolare                        | 248        |
| 9.3      | Trasformata di Fourier  | 250        |
| 9.3.1    | Definizione della trasformata di Fourier                                  | 250        |
| 9.3.1.1  | Interpretazione della trasformata come prodotto scalare                   | 251        |
| 9.3.2    | Principali proprietà della trasformata di Fourier                         | 252        |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 9.3.3   | Trasformata di Fourier di segnali elementari . . . . .                                       | 255 |
| 9.3.4   | Proprietà dell'impulso di Dirac . . . . .  | 256 |
| 9.3.5   | Trasformata di Fourier di un segnale periodico e legami<br>con la serie di Fourier . . . . . | 257 |
| 9.3.6   | Densità spettrali di energia e di potenza . . . . .  | 258 |
| 9.4     | Sistemi a tempo continuo . . . . .   | 260 |
| 9.4.1   | Classificazione di un sistema . . . . .  | 260 |
| 9.4.1.1 | Definizione di Sistema . . . . .   | 260 |
| 9.4.1.2 | Linearità . . . . .  | 260 |
| 9.4.1.3 | Tempo-invarianza . . . . .   | 260 |
| 9.4.1.4 | Memoria . . . . .  | 261 |
| 9.4.1.5 | Causalità . . . . .  | 261 |
| 9.4.1.6 | Stabilità . . . . .  | 261 |
| 9.4.2   | Sistemi lineari e lineari tempo invarianti . . . . .   | 261 |
| 9.4.2.1 | Sistemi lineari . . . . .  | 261 |
| 9.4.2.2 | Sistemi lineari tempo invarianti . . . . .   | 262 |
| 9.4.3   | Analisi in frequenza dei sistemi LTI . . . . .   | 263 |
| 9.4.3.1 | Sistemi a Fase Lineare . . . . .   | 265 |
| 9.4.3.2 | Filtri ideali . . . . .  | 265 |
| 9.4.3.3 | Classificazione di sistemi LTI . . . . .   | 266 |
| 9.4.3.4 | Memoria . . . . .  | 266 |
| 9.4.3.5 | Causalità . . . . .  | 266 |
| 9.4.3.6 | Stabilità . . . . .  | 266 |
| 9.4.3.7 | Caratterizzazione di un sistema LTI in termini<br>di correlazione . . . . .                  | 267 |
| 9.5     | Variabili casuali . . . . .  | 269 |
| 9.5.1   | Misura di probabilità . . . . .  | 269 |
| 9.5.2   | Elementi di calcolo combinatorio . . . . .   | 271 |
| 9.5.3   | Variabili casuali . . . . .  | 273 |
| 9.5.3.1 | Esempi di variabili casuali . . . . .  | 277 |
| 9.5.4   | Prove ripetute indipendenti . . . . .  | 278 |
| 9.5.5   | Vettori di variabili casuali . . . . .   | 280 |
| 9.5.6   | Variabili casuali congiuntamente gaussiane . . . . .   | 283 |
| 9.5.7   | Variabili casuali condizionate . . . . .   | 285 |
| 9.5.8   | Valori attesi condizionati . . . . .   | 288 |
| 9.5.9   | Teoremi limite . . . . .   | 290 |
| 9.6     | Processi stocastici . . . . .  | 291 |
| 9.6.1   | Definizione di processo stocastico . . . . .   | 291 |
| 9.6.2   | Medie d'insieme . . . . .  | 292 |
| 9.6.3   | Legami tra due o più processi stocastici . . . . .   | 294 |
| 9.6.4   | Medie temporali . . . . .  | 294 |
| 9.6.5   | Ergodicità . . . . .   | 295 |
| 9.6.6   | Densità spettrale di potenza . . . . .   | 296 |
| 9.6.7   | Processi ciclo-stazionari . . . . .  | 297 |
| 9.6.8   | Esempi di processi stocastici fondamentali . . . . .   | 298 |
| 9.6.8.1 | Processi puramente casuali . . . . .   | 298 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 9.6.8.2  | Processi di Markov . . . . .  | 298 |
| 9.6.8.3  | Processi gaussiani . . . . .  | 299 |
| 9.6.8.4  | Rumore bianco . . . . .   | 300 |
| 9.6.8.5  | Segnale periodico a fase casuale . . . . .                          | 301 |
| 9.6.8.6  | Processi PAM . . . . .  | 305 |
| 9.6.8.7  | Processo di Poisson . . . . .                                       | 307 |
| 9.6.8.8  | Passaggiate a caso e processo di Wiener-Levy . . . . .              | 310 |
| 9.6.9    | Filtraggio di un processo stocastico . . . . .                      | 312 |
| 9.6.9.1  | Trasformazione mediante un sistema non LTI . . . . .                | 314 |
| 9.6.10   | Somma e prodotto di processi stocastici . . . . .                   | 314 |
| 9.6.10.1 | Moltiplicazione tra due processi incorrelati . . . . .              | 314 |
| 9.6.10.2 | Somma di due processi . . . . .                                     | 314 |
| 9.7      | Campionamento . . . . .   | 315 |
| 9.7.1    | Introduzione . . . . .  | 315 |
| 9.7.2    | Campionamento ideale . . . . .                                      | 316 |
| 9.7.3    | Interpolazione ideale del segnale campionato . . . . .              | 319 |
| 9.7.4    | Teorema del campionamento . . . . .                                 | 323 |
| 9.7.5    | Filtraggio anti-aliasing . . . . .                                  | 323 |
| 9.7.6    | Altri filtri di interpolazione . . . . .                            | 324 |
| 9.7.6.1  | Mantenitore (Sample and Hold) . . . . .                             | 324 |
| 9.7.6.2  | Interpolazione lineare . . . . .                                    | 326 |
| 9.7.7    | Campionamento ed interpolazione di un processo stocastico . . . . . | 329 |
| 9.8      | Quantizzazione . . . . .  | 331 |
| 9.8.1    | Quantizzazione di un segnale . . . . .                              | 331 |
| 9.8.2    | Quantizzatore uniforme con tanti livelli . . . . .                  | 335 |
| 9.8.3    | Analisi spettrale del rumore di quantizzazione . . . . .            | 337 |
| 9.8.4    | Quantizzatore ottimo . . . . .                                      | 339 |